



Association **Q**uébécoise
des **J**eux **M**athématiques

Magie mathématique

Un appel magique

Comment faire le tour de magie

Préparation secrète : Aucune préparation n'est nécessaire.

Matériel :

- Une calculatrice
- Papier
- Crayon

Tour : L'objectif pour le magicien est de deviner un des chiffres d'un nombre créé par le spectateur à partir de son numéro de téléphone et d'opérations mathématiques.

Le magicien demande au spectateur d'écrire son numéro de téléphone (7 ou 10 chiffres), en secret. Il lui demande de mélanger les chiffres de ce numéro pour créer un deuxième nombre que le spectateur écrit aussi sans que le magicien ne le voie.

Le magicien demande au spectateur de soustraire, à l'aide d'une calculatrice, le plus petit de ses nombres du plus grand.

Le spectateur additionne ensuite les chiffres de la différence obtenue, puis il élève cette somme au carré.

Le magicien demande au spectateur de lui dire les chiffres non nuls du carré obtenu, sauf un (qui n'est pas zéro non plus !). C'est ce chiffre caché que le magicien devine.

Pistes de réflexion :

- Que se passe-t-il à chaque fois qu'on soustrait deux nombres composés des mêmes chiffres?
- Que se passe-t-il à chaque fois qu'on additionne les chiffres des nombres obtenus ?



Association **Q**uébécoise
des **J**eux **M**athématiques

Explication mathématique

Voici pourquoi ce tour fonctionne.

Le carré obtenu à la suite des opérations est nécessairement un multiple de 9 (voir les explications détaillées plus bas), donc la somme de ses chiffres sera elle-même divisible par 9. Le magicien n'a qu'à additionner les chiffres que le spectateur lui dit. Le chiffre manquant est celui qui fera que la somme soit un multiple de 9. Par exemple, si le spectateur dit 1, 2 et 9, le magicien trouve une somme de 12. Le multiple de 9 le plus près est 18 et $18 - 12 = 6$. Le chiffre caché est donc 6.

Si la somme des chiffres du spectateur est déjà un multiple de 9, cela implique que le chiffre caché est un 9 puisque le spectateur ne peut pas avoir caché un zéro.

Explications détaillées.

Les deux nombres initiaux sont composés des mêmes chiffres. Ils ont donc nécessairement le même reste si on les divise par 9 (propriété de l'arithmétique modulaire). Par exemple, si on prend 3759 et 5793, on a $3759 = 9 \times 417 + 6$ et $5793 = 9 \times 643 + 6$. Ils ont tous les deux un reste de 6 lors de la division par 9. La propriété demeure vraie peu importe le nombre de chiffres qui composent les nombres.

Lorsqu'on soustrait deux nombres qui ont les mêmes restes de la division par 9, on obtient nécessairement un multiple de 9. Pour savoir si un nombre est un multiple de 9, le truc est d'additionner ses chiffres. Si la somme est divisible par 9, le nombre l'est aussi. (Ce sont deux autres propriétés de l'arithmétique modulaire.)

Donc ici, puisqu'on a créé un multiple de 9, on sait qu'on obtiendra un autre multiple de 9 plus petit en additionnant ses chiffres.

Le carré de la somme est aussi un multiple de 9. (Si $S = 9a$ alors $S^2 = 9^2 a^2 = 9(9a^2)$.)

Ainsi, peu importe le numéro de téléphone initial, le spectateur obtiendra un nombre qui est un multiple de 9 à la suite des opérations mathématiques. La somme des chiffres de ce nombre est donc aussi un multiple de 9. C'est ce que le magicien utilise pour deviner le chiffre caché.